数理解析研究所講究録
474巻 1982年 23-37



# 写像の特異点に対するMORSEの不等式

千葉大理　　福田拓生

この話しは，$C^\infty$ 写像の特異点のまわりでおきる現象に関するものである。$C^\infty$ 写像では，いくらでもひねくれたものが構成できる。そこで H. Whitney と R. Thom は，性質の良い写像のみを研究対象とすることを提唱し，構造安定性の問題（全ての写像は安定写像で近似できるか？）を提起した。(1950年代後半)。この問題は1960年代後半から1971年にかけて，J. Matherによって完全に解決された。以来この分野の研究は，"良い写像" "良い特異点"の解明にむけられている。現在研究対象として考えられている良い特異点は，安定特異点と有限確定特異点である。安定特異点は有限確定である。この稿では この有限確定特異点（有限回のジェットでその位相型がきまってしまう）とよばれるものが，非常に一般的（有限確定でないものが，写像芽の空間の中で無限余次元の部分集合となる。）であるにもかかわらず，かなりきちんとした構造をもつことを報告する。

# 目　次



## §1. 安定性と有限確定性.（定義）.

<u>定義</u>（$C^\infty$ 同値, $C^\infty$ 同値）

二つの $C^\infty$ 写像 $f_1 : M_1 \to N_1$ と $f_2 : M_2 \to N_2$ が $C^\infty$ (resp $C^0$) 同値であるとは, 等式 $H \circ f_1 = f_2 \circ h$ を充たす $C^\infty$ 微分同相写像（resp. 同相写像）$h : M_1 \to M_2$ 及び $H : N_1 \to N_2$ が存在するときにいう。（下左図）

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & N_1 \arrow[d, "H"] \\
M_2 \arrow[r, "f_2"'] & N_2
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
(M_1, p_1) \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (N_1, f_1(p_1)) \arrow[d, "H"] \\
(M_2, p_2) \arrow[r, "f_2"] & (N_2, f_2(p_2))
\end{tikzcd}$$

二つの写像芽 $f_1:(M_1,p_1)\to(N_1,f_1(p_1))$，$f_2:(M_2,p_2)\to(N_2,f_2(p_2))$ が $C^\infty$ (resp. $C^0$) 同値であるとは，$H\circ f_1=f_2\circ h$ をみたす $C^\infty$ 微分同相写像 (resp. 同相写像) の芽が存在するときにいう。(前頁右図式)

定義 (有限確定特異点). 写像芽 $f:(M,p)\to(N,q)$ が $C^\infty$-$k$-確定 (resp. $C^0$-$k$-確定) $\overset{}{\underset{def}{\Longleftrightarrow}}$ $f$ の $p$ における $k$-jet を $j^kf(p)$ であらわすとき，$j^kg(p)=j^kf(p)$ なる任意の $C^\infty$ 写像芽 $g:(M,p)\to(N,q)$ が $f$ に $C^\infty$ 同値 (resp. $C^0$ 同値) になる。

ある $k>0$ に対して $C^\infty$-$k$-確定 (resp. $C^0$-$k$-確定) となるとき $C^\infty$-有限確定 ($C^0$-有限確定) という。

定義 (安定写像，安定特異点). 多様体 $M$ から $N$ への $C^\infty$ 写像全体の集合 $C^\infty(M,N)$ に Whitney の位相を入れておく。この位相で二つの写像 $f,g:M\to N$ が"近い"とは任意の点 $p\in M$ に対して，それらの値 $f(p)$ と $g(p)$ が近いばかりでなく，或る階数，例えば $k$ 階，までの jet $j^kf(p)$ と $j^kg(p)$ も又近い値をとることを意味する。

さて，写像 $f:M\to N$ が $C^\infty$ 安定 (resp. $C^0$ 安定) である $\Longleftrightarrow$ $f$ の近傍 $N(f)\subset C^\infty(M,N)$ が存在して，

$N(f)$ の任意の元が $f$ に $C^\infty$ 同値 (resp $C^0$ 同値) になる。

$C^\infty$ 安定写像 (resp. $C^0$ 安定写像) の特異点 及びそれらに $C^\infty$ 同値な特異点を $C^\infty$-安定特異点 (resp. $C^0$-安定特異点) という。

§2. 結果の概略.

この話しでは，$\mathbb{R}^n$ から平面 $\mathbb{R}^2$ への平面写像の特異点の話しに限定する。$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$，$p \geqq 3$，の場合にも同種の結果が得られるが，あまりよくつめていない。

$$\mathcal{M}(n,2) = \{ f: (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0) \mid C^\infty \text{ 写像芽} \}$$

とおく。そのとき，次のことが成立つ。

結果 $\mathcal{M}(n,2)$ の無限余次元部分集合 $\Sigma_\infty$ が存在して次の条件をみたす。

1) $f \in \mathcal{M}(n,2) - \Sigma_\infty \Longrightarrow f$ は $C^0$-有限確定

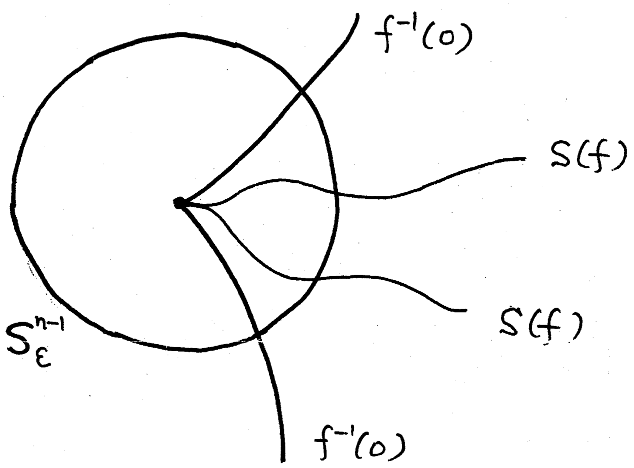
2) $f \in \mathcal{M}(n,2)$ が $C^0$-有限確定 $\Longrightarrow f$ は $\mathcal{M}(n,2) - \Sigma_\infty$ の元のどれかに $C^0$ 同値.

3) $C^\infty$ 写像 $f: (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ の原点における芽が

$\mathcal{M}(n,2)-\Sigma_\infty$ の元とする。すると

イ) 充分小なる $\varepsilon>0$ に対して $f^{-1}(0)\cap S_\varepsilon^{n-1}$ は $C^\infty$ 多様体となる。($\phi$ となる場合もある)。但し $S_\varepsilon^{n-1}$ は $\mathbb{R}^n$ の原点を中心とする半径 $\varepsilon$ の球面.

ロ) $f$ の特異点の集合 $S(f)$ は一次元の集合で $S(f)-\{0\}$ は滑らかな曲線となる。




ハ) (Euler-Poincaré の等式). §5 で詳しくみるように, Morse 理論から自然に導かれる方法により, $S(f)$ の各枝に指標を定義できる。$m_i(f)$ で 指標が $i$ の $S(f)$ の枝の数をあらわすとき次の等式を得る。($\chi(\cdots)$ は Euler 数)

$$\sum (-1)^i m_i(f) + \chi\left(f^{-1}(0)\cap S_\varepsilon^{n-1}\right) = 1+(-1)^{n-1}$$

ニ) $f^{-1}(0)=\{0\}$ のとき, 更に詳しい Morse 型の不等式を得る。 ($b_i(M)$ で $M$ の $i$ 次 Betti 数をあらわす。)

$$\begin{cases} m_0(f) \geq b_0(S^{n-1}) \\ m_1(f)-m_0(f) \geq b_1(S^{n-1})-b_0(S^{n-1}) \end{cases}$$

$$m_2(f) - m_1(f) + m_0(f) \geqq b_2(S^{n-1}) - b_1(S^{n-1}) + b_0(S^{n-1})$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

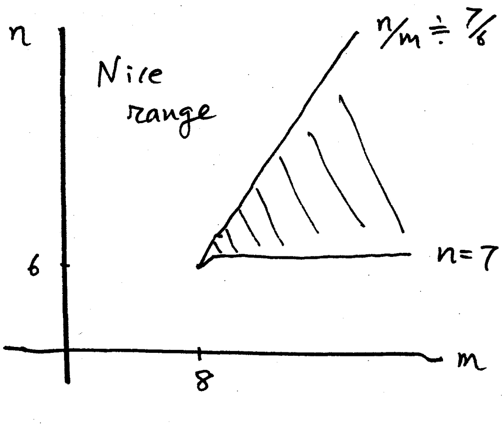
$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i m_i(f) = \chi(S^{n-1}).$$

## §3 背景*)

*) この節に興味のある人は [W], [F3] を参照して下さい。

何故 上のような結果を求めたか を説明するには, $C^\infty$写像の局所理論の現状を説明するのが一番である。J. Mather の安定性定理によると

A) $C^\infty(M^m, N^n)$ の中で $C^\infty$ 安定写像が稠密に存在する必要十分条件は, 多様体の構造によらず, 次元の組 $(m, n)$ のみにより, それは $(m, n)$ が 次の グラフの斜線の外にあることである。このとき $(m, n)$ を nice dimension といい, nice dimension の集合を nice range という。



B). $C^0$安定写像は 次元に関係なく，いつでも稠密に存在する。

さて，局所理論にかぎって現状をみてみると，

I) Nice range における $C^\infty$安定特異点の分類は完成している。(J. Mather, J. Damon) 又この場合 $C^0$-同値による分類と $C^\infty$-同値による分類は一致する。(J. Damon).

II) Nice range の外では，$C^0$ 安定特異点の $C^0$-同値による分類が意味をもつ。しかし今までの所，このことに関しては何ら結果がない。 困難の原因は，I) においては，Malgrange の予備定理により，$C^\infty$ 安定特異点の $C^\infty$分類が，付随する環の分類に帰着されたが，位相的分類には今までの所，代数が使えないからである。

III) II の観点から $C^0$安定特異点に対する位相不変量の開発が望まれるが，J. Damon の二・三の結果以外あまり知られていない。

IV) $C^\infty$ 及び $C^0$ 有限確定特異点は Complex holomorphic

の場合の孤立特異点・complete Intersection に相当する。従って当然研究すべきものである。

i) $C^\infty$ 有限確定性の判定条件

イ) 関数の場合はほぼ完全といえる結果がある。

ロ) 写像の場合には，「コレコレの条件(代数により計算可能なもの)をみたせば $C^\infty$-k-確定である」という形のものがいくつかある。しかし必要十分条件ではなく，幾人かの人が頑張って改良しつつある。主な道具は Malgrange の予備定理と中山の補題である。

ii) $C^0$ 有限確定性の判定条件.

イ) 関数の場合は完全にわかっている。(T. C. Kuo 他)

ロ) 写像の特異点の場合には，ほとんどわかっていない。(最近 石川剛朗(京大)により，$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^2$ の場合の結果が得られた。)

iii) 安定特異点・有限確定特異点のまわりで起る現象を解析したいが，ほとんど結果がない。著者が知っている唯一の結果は，有限型の局所被覆 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ の位相被覆度を $f$ に付随する局所環 $Q(f)$ に関する量であらわす Levine-Eisenbud の定理である。この種の定理の一般化の試みが期待される。

V) 結論として，その重要性にもかかわらず，$C^\infty$写像の特異点の位相的分類及び解析は，今までの所，ほとんど何もわかっていない。

§2に述べた結果はIV)のiii)に沿うものである。

## §4 基本定理.

§2で述べた結果の基となる定理は次のものである。まず記号を定める。

$\mathcal{M}(n,p)=\{f:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)\ C^\infty 写像芽\}$

$S^{p-1}_\delta=\{y\in\mathbb{R}^p \mid \|y\|=\delta\}$

$D^n_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\leq\varepsilon\}$

$[f]_0$：　写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ に対して，その原点における芽.

定理1. ([F1], [F2])　$\mathcal{M}(n,p)$ の無限余次元の部分集合 $\Sigma_\infty$ で次の条件をみたすものが存在する。

1) $[f]_0\in\mathcal{M}(n,p)-\Sigma_\infty \Rightarrow [f]_0$ は $C^0$-有限確定

2) 任意の $C^0$-有限確定写像芽は $\mathcal{M}(n,p)-\Sigma_\infty$ のどれかの元に $C^0$-同値.

3) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ で，$[f]_0\in\mathcal{M}(n,p)-\Sigma_\infty$

$\Longrightarrow$ イ) 充分小なる $\varepsilon>0$，$\delta>0$ に対して

$D^n_\varepsilon\cap f^{-1}(S^{p-1}_\delta)$ は（境界のある）$C^\infty$ 多様体

ロ) 制限写像 $f:D^n_\varepsilon\cap f^{-1}(S^{p-1}_\delta)\to S^{p-1}_\delta$ は位相安定写像で，その位相型は $[f]_0$ の位相型を定める。

注意. 1) の条件のみをみたす $\Sigma_\infty$ の存在は R. Thom [$T_1$] により知られていた。J. Mather は，この定理を改良して，$C^0$ 安定写像の稠密性を証明した。この論文 [$T_1$] の証明は難解で，"extremely sketchy" と評されている。著者は，これをなんとか理解しようともがいていて，3) に気づいた。

さて，上の定理の 1) 2) から $C^0$ 有限確定特異点がかなり一般的であることがわかる。一方 位相安定写像 $f:M\to N$ に対しては，いろいろと大域的な結果（$N=\mathbb{R}$ の場合には Morse の不等式，より一般には，特異集合と特性類の関係）が知られている。（例えば R. Thom [$T_2$]，安藤良文 [$A_1$] [$A_2$] 参照）それでこれらの結果と定理1 3) のロ) を組合せると $C^0$ 有限確定特異点のまわりにあらわれる特異点と $D^n_\varepsilon\cap f^{-1}(S^{p-1}_\delta)$

の構造（同じだが $f^{-1}(0)\cap S_\varepsilon^{n-1}$ の構造）との間の関係がいろいろわかる。次節で，それを $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^2$ の場合にみる。

## §5. §2 の結果の詳しい考察.

$\Sigma_\infty$ を前節の定理1で得られたものとする。今 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^2$ でその原点における芽 $[f]_0$ が $[f]_0\in\mathcal{M}(n,2)-\Sigma_\infty$ とする。すると定理1の3）から，充分小なる $\varepsilon>0$ と $\delta>0$ に対して，制限写像

$$f_{\varepsilon,\delta}=f|D_\varepsilon^n\cap f^{-1}(S_\delta^1):D_\varepsilon^n\cap f^{-1}(S_\delta^1)\to S_\delta^1$$

は位相安定写像となる。$S_\delta^1$ に反時計まわりの向きをつける。$S_\delta^1$ は1次元多様体なので，局所座標で考えることにより，$f_{\varepsilon,\delta}$ の特異点を関数の臨界点と考えることができる。今 $f_{\varepsilon,\delta}$ が位相安定なので，その特異点は全て非退化な臨界点となり，それらに Index（指標）が，Morse 関数の場合と同じく，定義できる。

さて，$m_\lambda(f_{\varepsilon,\delta})=$（Morse 関数と考えたときの）$f_{\varepsilon,\delta}$ の指標 $\lambda$ の臨界点の個数

$b_i(M)=M$ の $i$ 次元 Betti 数

$$\chi(M) : M \text{ の Euler 標数}$$

とおく。

定理2. $f$, $\varepsilon, \delta$ を上のとおりとする。そのとき次が成立つ。

1) (Euler-Poincaré の等式)

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i m_i(f_{\varepsilon,\delta}) + \chi(f^{-1}(0)\cap S_\varepsilon^{n-1}) = \chi(S_\varepsilon^{n-1})$$

2) 特に $f^{-1}(0)\cap D_\varepsilon^n = \{0\}$ のとき 次の Morse 型の不等式が成立つ。

$$\begin{cases} m_0(f_{\varepsilon,\delta}) \geqq b_0(S_\varepsilon^{n-1}) = 1 \\ m_1(f_{\varepsilon,\delta}) - m_0(f_{\varepsilon,\delta}) \geqq b_1(S_\varepsilon^{n-1}) - b_0(S_\varepsilon^{n-1}) \\ m_2(f_{\varepsilon,\delta}) - m_1(f_{\varepsilon,\delta}) + m_0(f_{\varepsilon,\delta}) \geqq b_2(S_\varepsilon^{n-1}) - b_1(S_\varepsilon^{n-1}) + b_0(S_\varepsilon^{n-1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i m_i(f_{\varepsilon,\delta}) = \chi(S_\varepsilon^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1} \end{cases}$$

2) の証明が次節で与えられる。1) の証明は [F₂] を参照.

さて，上の 1) 2) にあらわれる $m_i(f_{\varepsilon,\delta})$ が $\varepsilon, \delta$ によらず一定であれば，§2 で述べた結果と同じ結果となる。実際

イ) $m_i(f_{\varepsilon,\delta})$ は $\varepsilon,\delta$ を充分小さくとるとき，$\varepsilon,\delta$ によらず一定であることがわかる。

更に詳しく述べると

ロ) $\{f_{\varepsilon,\delta}$ の臨界点$\} = D^n_\varepsilon \cap f^{-1}(S^1_\delta) \cap \{f$の特異点$\}$

(更に $\delta$ を小さくとると) $= f^{-1}(S^1_\delta) \cap \{f$の特異点$\}$

となる。又

ハ) $p$ を $f$の特異点とし $\|f(p)\| = \delta$ とする。すると $p$ は $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ の fold 型の特異点で 適当な座標 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$，$(\eta_1, \eta_2)$ のもとに 次の型にあらわせる。

$$*)\quad \begin{cases} \eta_1 = \xi_1 \\ \eta_2 = -\xi_2^2 - \xi_3^2 - \cdots - \xi_\lambda^2 + \xi_{\lambda+1}^2 + \cdots + \xi_n^2 \end{cases}$$

もし $(\eta_1, \eta_2)$ の向きを $\mathbb{R}^2$ の正の向きにとると，この $\lambda$ は $f_{\varepsilon,\delta}$ の臨界点 $p$ の指標と一致する

ニ) $f$の特異点の集合 $S(f)$ は，§2 の図で示したように，原点から何本かの枝が出た形になっているが，それぞれの枝ではその特異点の標準型は一致する。したがって *)の型の特異点の枝の指標を $\lambda$ と定めると，

$$m_\lambda(f_{\varepsilon,\delta}) = S(f)\text{の index } \lambda \text{ の枝の数}$$

となり，§2の 等式，不等式が 定理2から得られる。

## §6. 定理2, 2) (§5) の証明.

$[f]_0 \in \mathcal{M}(n,2)-\Sigma_\infty$ で $f^{-1}(0)=\{0\}$ とする。$\delta$を充分小さくすると $f^{-1}(S^1_\delta)\subset D^n_\varepsilon$ となる。従って

$$D^n_\varepsilon \cap f^{-1}(S^1_\delta)=f^{-1}(S^1_\delta)$$

となり

これは境界のない多様体となる。$\delta\to 0$ のとき $f^{-1}(S^1_\delta)$は原点に縮んでいくので，$f^{-1}(S^1_\delta)$ はホモトピー球面である。

一方，定理1の3)より制限写像

$$f: f^{-1}(S^1_\delta)\longrightarrow S^1_\delta$$

は安定写像で，従って $f$ の値は $\mathbb{R}$ ではないが，$f$ は Morse 関数と考えられる。(§5 の始めの部分の復習).

一方， $S^1_\delta$ の普遍被覆 $\pi:\mathbb{R}\to S^1_\delta$ を考える。
$f^{-1}(S^1_\delta)$ がホモトピー球面なので基本群 $\pi_1(f^{-1}(S^1_\delta))=\{0\}$ となり， $f$ の lifting $\bar{f}: f^{-1}(S^1_\delta)\longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ f^{-1}(S^1_\delta) \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[r, "f"] & S^1_\delta \end{tikzcd}$$

すると，この $\bar{f}$ は，正真正明の Morse 関数で，$f$ と $\bar{f}$ の臨界点及びそれらの指標は一致するので，$\bar{f}$ に対する Morse の不等式より，定理2, 2) を得る。 証明終.

# 文　献


[$A_1$] 安藤良文: ある型のThom-Boardmanの特異集合を持たない微分可能写像について, 数学, 30-3 (1978), 38-49

[$A_2$] Y. Ando, Elimination of certain Thom-Boardman singularities of order 2. J. Math. Soc. Japan 34-2 (1982)241-268

[$F_1$] T. Fukuda, Local topological properties of differentiable mappings I, Invent. math. 65 (1981) 227-25o

[$F_2$] -------- II, to appear

[$F_3$] 福田拓生: 微分可能写像の特異点論, 数学, 34-2 (1982) 116-139

[$T_1$] R. Thom, Local topological properties of differentiable mappings, Colloq. on differential analysis, Oxford Univ. Press (1964)

[$T_2$] R. Thom, Les singularités des applications différéntiables, Ann. Inst. Fourier, 6 (1955-56), 43-87.

[W] C.T.C. Wall, Finite determinacy of Smooth map-germs I, II, Bull. London Math. Soc. (1981), 481-539.

[L-E] D.Eisenbud and H.Levine, An algebraic formula for the degree of a C map germ, Ann. of Math.106(1977) 19-44


尚 J. Mather, J. Damon の仕事については, [$F_3$] [W] の文献表を参照して下さい。[W] はこの時点での, 微分可能写像の特異点(局所理論)に関する最良の文献表である。(もちろん, 本文も秀れた Survey である)